

Índice general

Preámbulo	5
Índice general	7
1. Método de las características	13
1.1. Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden	13
1.1.1. Ecuaciones casi lineales	14
1.1.1.1. Dos variables independientes	14
1.1.1.2. Superficies ortogonales	17
1.1.1.3. Más de dos variables independientes	19
1.1.2. Ecuación de las ondas cinemáticas	19
1.1.3. Onda de choque	22
1.1.4. Estructura de la onda de choque. Ecuación de Burgers	27
1.1.5. Ecuación general de primer orden.	29
1.1.6. Ecuación de Hamilton-Jacobi para una masa puntual	33
1.1.6.1. Ejemplo con potencial $W = Kxy$	34
1.1.7. Óptica geométrica	37
1.1.7.1. Ejemplo bidimensional	40
1.1.8. Deflexión de la luz en un campo gravitatorio	42
1.1.9. Ejercicios propuestos	49
1.2. Ecuaciones casi lineales de segundo orden	54
1.2.1. Características	54
1.2.2. Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales	57
1.2.3. Transformaciones y formas canónicas	59

1.2.4.	Soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden típicas	61
1.2.4.1.	Ecuación de ondas	61
1.2.4.2.	Ecuación de Laplace	63
1.2.4.3.	Ecuación de difusión	65
1.2.5.	Ecuación hiperbólica con coeficientes constantes	68
1.2.6.	Ondas planas en un medio muy dispersivo	69
1.2.6.1.	Solución por el método de las características	70
1.2.6.2.	Comparación con la solución numérica	73
1.2.7.	Ecuación de Black-Scholes: Precio de activos financieros	75
1.2.7.1.	Solución analítica	76
1.2.7.2.	Comparación con la solución numérica	79
1.2.8.	Ejercicios propuestos	80
1.3.	Sistemas de ecuaciones casi lineales de primer orden	81
1.3.1.	Características	81
1.3.2.	Ecuaciones de Cauchy-Riemann	83
1.3.3.	Integración numérica por las características	84
1.3.4.	Transferencia de calor en un medio poroso	87
1.3.5.	Movimiento unidimensional isentrópico de un gas	91
1.3.6.	Ondas no lineales generadas por el movimiento de un pistón	95
1.3.6.1.	Onda de expansión	95
1.3.6.2.	Onda de compresión. Onda de choque	98
1.3.7.	Piston con aceleración constante	99
1.3.7.1.	Solución analítica por las características	99
1.3.7.2.	Comparación con la solución numérica	102
1.3.8.	Ejercicios propuestos	106
2.	Método de semejanza	109
2.1.	Análisis dimensional e invariancia	110
2.1.1.	Teorema π de Buckingham	110
2.1.1.1.	Magnitudes de Planck	112
2.1.1.2.	Difusión desde fuente singular: Análisis dimensional	114
2.1.1.3.	Movimiento de una gota sobre una superficie horizontal	117
2.1.2.	Invariancia de las EDPs frente a un escalado de las variables	118
2.1.2.1.	Difusión desde fuente singular: Semejanza	119
2.1.2.2.	Difusión desde fuente finita: Numérico	122
2.1.2.3.	Problema de Rayleigh	124
2.1.2.4.	Rotura de una presa: Solución de semejanza	127
2.1.2.5.	Rotura de una presa: Comparación con numérico	131
2.1.2.6.	Movimiento de una gota sobre una superficie (cont.)	132
2.1.3.	Ejercicios propuestos	135
2.2.	Grupos uniparamétricos de transformaciones	139
2.2.1.	Grupo invariante. Coordenadas canónicas	140
2.2.2.	Generalización a n coordenadas	143

2.2.3.	Grupo extendido: Transformación de la derivada	144
2.2.4.	Ecuación diferencial ordinaria de primer orden invariante	145
2.2.5.	Ejemplos de grupos uniparamétricos de transformaciones	146
2.3.	Ecuaciones diferenciales ordinarias	149
2.3.1.	Ecuaciones de primer orden	150
2.3.1.1.	Reducción a una cuadratura	150
2.3.1.2.	Factor de integración de Lie	153
2.3.1.3.	Criterios para que una ecuación admita un grupo	155
2.3.1.4.	Ecuaciones invariantes frente a un grupo	156
2.3.1.5.	Ecuación de Riccati	158
2.3.2.	Ecuaciones de segundo y mayor orden	162
2.3.2.1.	Reducción de una EDO de segundo a primer orden	162
2.3.2.2.	EDOs de 2º orden invariantes frente a un grupo	164
2.3.2.3.	EDOs invariantes frente a traslaciones de x o y	166
2.3.2.4.	EDOs invariantes frente a un cambio de escala	167
2.3.2.5.	Reducción a una ecuación de Riccati	168
2.3.2.6.	Ecuación de Thomas-Fermi para un átomo pesado	170
2.3.2.7.	Ecuación de Blasius para la capa límite	174
2.3.2.8.	Comparación de Blasius con numérico	176
2.3.3.	Ejercicios propuestos	179
2.4.	Ecuaciones en derivadas parciales	181
2.4.1.	Solución de semejanza	182
2.4.1.1.	Transformaciones de cambio de escala	183
2.4.2.	Determinación de los grupos invariantes	184
2.4.2.1.	Ecuaciones de Laplace y de ondas bidimensionales	185
2.4.2.2.	Ecuación de difusión con un término fuente	188
2.4.3.	Ecuación de Fisher para la dinámica de poblaciones	191
2.4.3.1.	Solución de semejanza tipo onda viajera	192
2.4.3.2.	Comparación con la solución numérica	196
2.4.4.	Ecuación de Korteweg - de Vries	197
2.4.4.1.	Comparación con soluciones numéricas	199
2.4.5.	Convección de calor mixta sobre una placa caliente	201
2.4.6.	Ejercicios propuestos	205
3.	Método de separación de variables	209
3.1.	Conducción de calor en una placa. Series de Fourier	209
3.1.1.	Placa uniforme con temperatura constante en los extremos	212
3.1.2.	Caso general	215
3.2.	Problema de Sturm-Liouville. Autovalores y autofunciones	216
3.3.	Conducción con fuente de calor. Problema no homogéneo	219
3.4.	Cuerda vibrante. Separación versus características	224
3.5.	Oscilador armónico cuántico. Polinomios de Hermite	228
3.6.	Guía de ondas electromagnéticas. Funciones de Bessel	232

3.7.	Movimiento fluido en un conducto circular	236
3.7.1.	Comparación con la solución numérica	240
3.8.	Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Armónicos esféricos	242
3.8.1.	Comparación solución numérica del campo eléctrico en una esfera	248
3.9.	Ecuación de Schrödinger del átomo de hidrógeno. Polinomios de Laguerre	250
3.10.	Movimiento fluido potencial no estacionario sobre una elipse	255
3.10.1.	Comparación con la solución numérica	260
3.11.	Ejercicios propuestos	262
4.	Método de perturbaciones	269
4.1.	Nociones preliminares. Ejemplos algebraicos e integrales	270
4.1.1.	Expansión y secuencia asintóticas	270
4.1.2.	Algunos ejemplos algebraicos	272
4.1.2.1.	Problema regular	272
4.1.2.2.	Problema singular. Reescalado	273
4.1.2.3.	Otra secuencia asintótica	276
4.1.3.	Autovalores	277
4.1.3.1.	Niveles de energía de un oscilador inarmónico cuántico	281
4.1.4.	Expansión asintótica de integrales	283
4.1.4.1.	Lema de Watson	284
4.1.4.2.	Método de Laplace	285
4.1.4.3.	Función de partición en mecánica estadística	288
4.1.4.4.	Método de la fase estacionaria	292
4.1.4.5.	Onda dispersiva para tiempos grandes	298
4.1.5.	Ejercicios propuestos	302
4.2.	Perturbaciones regulares en ecuaciones diferenciales	305
4.2.1.	Trayectoria de una masa puntual	306
4.2.2.	Movimiento generado por un esfuerzo cortante	308
4.2.2.1.	Comparación con la solución numérica	312
4.2.3.	Ejercicios propuestos	314
4.3.	Perturbaciones singulares: Desarrollos asintóticos acoplados	318
4.3.1.	Ejemplo preliminar ilustrativo del método	318
4.3.1.1.	Solución exterior	320
4.3.1.2.	Solución interior	321
4.3.1.3.	Acoplamiento asintótico	323
4.3.1.4.	Solución compuesta	327
4.3.2.	Un ejemplo con dos capas límites	327
4.3.3.	Ejemplo no lineal con capas internas y límites	330
4.3.4.	Solución asintótica de la ecuación de Fisher-Kolmogorov	338
4.3.4.1.	Comparación con la solución numérica	340
4.3.5.	Oscilador amortiguado: Capa límite inicial	341
4.3.6.	Transporte de iones en la diálisis de partículas coloidales	345
4.3.6.1.	Comparación con la solución numérica	351

4.3.7.	Una ecuación elíptica no lineal	354
4.3.7.1.	Solución exterior	355
4.3.7.2.	Solución interior	356
4.3.7.3.	Solución compuesta	358
4.3.7.4.	Comparación con la solución numérica	359
4.3.8.	Ejercicios propuestos	361
4.4.	Perturbaciones singulares: Método de las escalas múltiples	364
4.4.1.	Ecuación de Duffing	364
4.4.2.	Capa límite mediante dos escalas	372
4.4.3.	Ecuación de segundo orden con <i>coeficiente</i> lentamente variable	374
4.4.4.	Cuerda vibrante con una ligera amortiguación	378
4.4.4.1.	Solución de orden cero por separación de variables	379
4.4.4.2.	Solución de orden cero por las características	381
4.4.5.	Propagación de una onda no lineal. Ecuación de Klein-Gordon	384
4.4.5.1.	Comparación con la solución numérica	388
4.4.6.	Ecuación KdV. Método de las coordenadas extendidas.	390
4.4.6.1.	Comparación con la solución numérica	393
4.4.7.	Ejercicios propuestos	395
4.5.	Método WKB	398
4.5.1.	EDO lineal de segundo orden	398
4.5.2.	Comparación con el método de las escalas múltiples	401
4.5.3.	Autovalores y autofunciones de un problema de Sturm-Liouville	402
4.5.4.	Puntos singulares o de retroceso	404
4.5.5.	Autovalores y autofunciones en un problema singular	408
4.5.5.1.	Comparación con resultados numéricos: Difusioforesis	415
4.5.6.	Ejercicios propuestos	417
A.	Operaciones con ∇ en coordenadas curvilíneas	419
A.1.	Coordenadas curvilíneas ortogonales	419
A.2.	Coordenadas cilíndricas	421
A.3.	Coordenadas esféricas	422
A.4.	Coordenadas elípticas	423
	Bibliografía	425
	Índice alfabético	429