Circuitos Eléctricos. Análisis por nudos y por mallas

Teoría y Problemas resueltos

Alfonso Bachiller Soler, Ramón Cano González
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Sevilla

Ediciones Díaz de Santos
E-mail: ediciones@editdiazdesantos.com
Internet: www.editdiazdesantos.com

ISBN: 978-84-9052-299-8
Depósito legal: M-2671-2021

Diseño de cubierta: P55 Servicios Culturales CB.
Diseño de maquetación (LaTeX): F. Javier Payán Somet.
Impreso en España

A nuestros alumnos
y maestros

Índice

1
Introducción

Un circuito eléctrico es un conjunto de elementos eléctricos interconectados entre sí. En general, resolver un circuito eléctrico consiste en calcular la tensión y la intensidad de cada uno de dichos elementos, ya que, a partir de dichas magnitudes, se pueden obtener fácilmente otras, como son la potencia y la energía.

En todo circuito eléctrico se han de cumplir simultáneamente las leyes de Kirchhoff y las ecuaciones de definición de cada uno de los elementos.

Debido a que los elementos de un circuito están interconectados entre sí, se debe cumplir la ley de Kirchhoff de intensidades en cada uno de los nudos [1] del circuito. Asimismo, se debe cumplir la ley de Kirchhoff de tensiones en cada uno de los caminos cerrados (lazos o bucles) que se puedan establecer en el circuito. Por último, la tensión y la intensidad en cada uno de los elementos del circuito debe cumplir la ecuación de definición propia del elemento.

A continuación se hará un análisis del número de incógnitas y del número de ecuaciones involucradas en el cálculo de las tensiones e intensidades de los elementos de un circuito. En este sentido, en un circuito eléctrico formado por n nudos y c elementos de dos terminales se tienen $2c$ incógnitas que corresponden a la tensión e intensidad en cada uno de los elementos. Por otro lado, en este mismo circuito se pueden plantear las siguientes ecuaciones linealmente independientes:

- Ley de Kirchhoff de intensidades: $n - 1$.
- Ley de Kirchhoff de tensiones: $c - n + 1$ (Nº de mallas).
- Ecuación de definición de los elementos: c.

Se puede comprobar que el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones.

Hay que destacar que en este análisis no se ha tenido en cuenta la reducción del número de incógnitas (y por tanto del número de ecuaciones) procedente de las fuentes independendientes de tensión y de intensidad.

[1] Un nudo es un punto de interconexión de dos o más elementos de un circuito.

Ejemplo 1.0.1. En el circuito de la Figura 1.1, obtener las ecuaciones que permiten calcular la tensión e intensidad de todos los elementos. Se han indicado los nudos del circuito así como los caminos cerrados donde se aplicarán las leyes de Kirchhoff de intensidad y de tensión respectivamente.

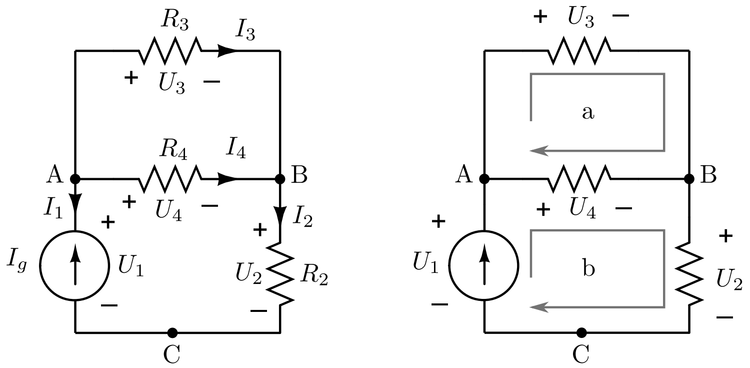

Figura 1.1.

Solución. Se puede comprobar que el circuito tiene 3 nudos y 4 elementos:

$$n = 3 \;\; ; \;\; c = 4$$

En este caso, el número de incógnitas son 8 ($2c$=$2 \cdot 4$=8):

$$U_1, U_2, U_3, U_4, I_1, I_2, I_3, I_4$$

En cuanto a las ecuaciones:

- Ley de Kirchhoff de intensidades: $n - 1$=$3 - 1$=2

$$\text{Nudo A}: \; -I_1 - I_3 - I_4 = 0$$
$$\text{Nudo B}: \; I_3 + I_4 - I_2 = 0$$

  Se puede observar que la ecuación resultante de aplicar la ley de Kirchhoff de intensidades al nudo C es linealmente dependiente de las anteriores, por lo que no aporta información adicional.

- Ley de Kirchhoff de tensiones: $c - n + 1$=$4 - 3 + 1$=2

$$\text{Camino cerrado a}: \; U_3 - U_4 = 0$$
$$\text{Camino cerrado b}: \; U_4 + U_2 - U_1 = 0$$

- Ecuación de definición de los elementos: $c = 4$

$$I_1 = -I_g$$
$$U_2 = R_2 I_2$$
$$U_3 = R_3 I_3$$
$$U_4 = R_4 I_4$$

Reordenando las ecuaciones, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los circuitos relativamente sencillos se pueden analizar aplicando las leyes de Kirchhoff junto con las relaciones tensión-intensidad en cada elemento, tal y como se ha descrito anteriormente. Sin embargo, a medida que el circuito se vuelve más complicado, implica un número cada vez mayor de elementos y es necesario emplear técnicas de análisis que faciliten su resolución. Eligiendo de forma conveniente un conjunto “básico” de variables, es posible reducir el sistema de $2c$ ecuaciones visto anteriormente. A partir de dicho conjunto de variables básicas se puede obtener cualquier otra variable del circuito. Si dichas variables básicas son las tensiones de los nudos, entonces da lugar al **método de análisis por nudos**, mientras que si se eligen como variables básicas las intensidades de malla, entonces da lugar al **método de análisis por mallas**. Dichos métodos permiten resolver un circuito con un número mínimo de ecuaciones.

En los dos capítulos siguientes se analizarán dichos métodos y se resolverán un conjunto de problemas de diversa índole mostrando la casuística que se puede presentar en la realidad.

Una cuestión importante que cabría preguntarse, una vez asimilados los dos métodos de análisis, es la selección del método más eficiente en cada problema. En términos generales, eso lo determinan dos factores:

1. Según la naturaleza del circuito

- Circuitos con elementos en serie y fuentes de tensión: **Mallas**.
- Circuitos con elementos en paralelo y fuentes de intensidad: **Nudos**.
- Circuitos con menos nudos que mallas: **Nudos**.
- Circuitos con menos mallas que nudos: **Mallas**.
- Circuitos que no son de disposición plana: **Nudos**.

2. Según la información requerida

- Si se requieren las tensiones de los nudos: **Nudos**.
- Si se requieren las intensidades de malla: **Mallas**.

No obstante lo anterior, cabe destacar que el método de análisis por nudos es más fácil de programar en un computador que el método de análisis por mallas. Como curiosidad, el método de nudos es el usado para el planteamiento de las ecuaciones de flujo de cargas de un sistema eléctrico de potencia.

2
Método de nudos

El objetivo del método de análisis por nudos es, para un circuito eléctrico, plantear de forma sistemática por inspección un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas sean las tensiones de los nudos.

2.1. Tensiones de los nudos

La tensión de un nudo cualquiera del circuito se define como la diferencia de potencial entre dicho nudo y uno de referencia. En este caso, el nudo de referencia será uno de los nudos del circuito. Por tanto, cuando se habla de la tensión de un nudo, en realidad es la tensión de dicho nudo con respecto al nudo de referencia.

En la Figura 2.1 se muestra un elemento de dos terminales conectado al nudo j y al nudo k. Una vez conocida la tensión del nudo j, u_j, y la tensión del nudo k, u_k, es posible calcular la tensión del elemento como sigue:

$$u_{jk} = u_j - u_k \tag{2.1}$$

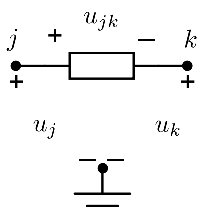

Figura 2.1. Tensiones de los nudos.

En el caso de circuitos que solo contengan resistencias (impedancias) y fuentes de intensidad, una vez conocidas las tensiones de los nudos se puede obtener cualquier otra magnitud del circuito. En el caso de las fuentes de intensidad, su incógnita es la tensión, que se puede obtener como diferencia entre las tensiones de los nudos a los que está conectada. En el caso de las resistencias (impedancias), una vez conocida la tensión de cada uno de sus nudos, se puede obtener la tensión en las mismas y teniendo en cuenta la ecuación de definición, es decir, la ley de Ohm, es posible obtener la intensidad que circula por cada una de ellas. Por tanto, queda demostrado que las tensiones de los nudos constituyen un conjunto de variables básicas, a partir de las cuales se puede obtener cualquier otra variable del circuito.

El caso de circuitos que contengan fuentes de tensión y fuentes dependientes se tratará más adelante.

2.2. Ecuaciones de nudos en circuitos resistivos

Con objeto de desarrollar las ecuaciones de nudos, se considerará el nudo genérico j que se muestra en la Figura 2.2.

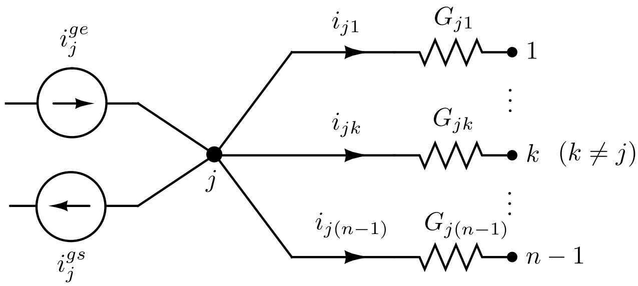

Figura 2.2. Nudo genérico j.

Aplicando la ley de Kirchhoff de intensidades ($k \neq j$)

$$i_{j1} + \ldots + i_{jk} + \ldots + i_{j(n-1)} = i_j^{ge} - i_j^{gs} \tag{2.2}$$

donde i_j^{ge} es la intensidad de la fuente de intensidad que está entrando en el nudo j, y i_j^{gs} es la intensidad de la fuente de intensidad que está saliendo del nudo j.

Teniendo en cuenta la relación tensión-intensidad en cada una de las conductancias, resulta:

$$G_{j1}[u_j - u_1] + \ldots + G_{jk}[u_j - u_k] + \ldots + G_{j(n-1)}[u_j - u_{n-1}] = i_j^{ge} - i_j^{gs} \tag{2.3}$$

Reordenando términos se obtiene lo siguiente:

$$\begin{gathered}\left(G_{j1} + \ldots + G_{jk} + \ldots + G_{j(n-1)}\right) u_j \\ - G_{j1}u_1 - \ldots - G_{jk}u_k - \ldots - G_{j(n-1)}u_{n-1} = i_j^{ge} - i_j^{gs} = i_j^g\end{gathered} \tag{2.4}$$

Extendiendo este mismo análisis a los $n-1$ nudos del circuito, se obtienen $n-1$ ecuaciones similares a la anterior, las cuales se pueden expresar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} G_{N_{(1,1)}} & \cdots & G_{N_{(1,n-1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N_{(n-1,1)}} & \cdots & G_{N_{(n-1,n-1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1^g \\ \vdots \\ i_{n-1}^g \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{G}_N \mathbf{U}_N = \mathbf{I}_N$$

donde

$\mathbf{G}_N$ se denomina matriz de conductancias nodales.

$\mathbf{U}_N$ se denomina vector de tensiones de nudos.

$\mathbf{I}_N$ se denomina vector de intensidades inyectadas en los nudos.

Según la ecuación (2.4) es fácil comprobar que los elementos de la matriz $\mathbf{G}_N$ se calculan como sigue:

$$G_{N_{(j,j)}} = \sum_k G_{jk} \quad \text{(sumatorio de todas las conductancias que tienen un terminal en el nudo } j\text{)}$$

$$G_{N_{(j,k)}} = -\sum G_{jk} \quad \text{(sumatorio, cambiado de signo, de todas las conductancias que tienen un terminal en el nudo } j \text{ y otro en el nudo } k\text{)}$$

Asimismo, los elementos del vector $\mathbf{I}_N$ se calculan como sigue:

$$i_j^g = \sum i_j^{ge} - i_j^{gs} \quad \text{(sumatorio de las fuentes de intensidad que inciden en el nudo } j\text{, positivas si entran en el nudo y negativas si salen)}$$

A continuación, a partir del circuito de la Figura 2.3, se mostrará a nivel práctico la aplicación del desarrollo teórico anterior. El objetivo es, usando la ley de Kirchhoff de intensidades y las relaciones tensión-intensidad en cada elemento, obtener un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas sean las tensiones de los nudos. Posteriormente se comprobará que este sistema se puede obtener directamente por inspección del circuito.

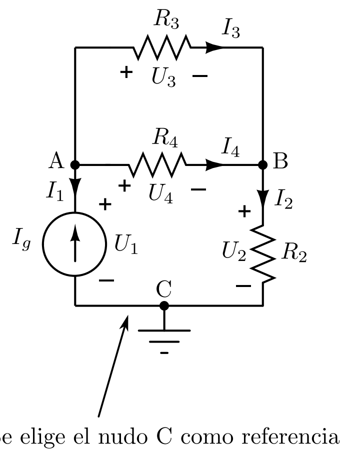

Figura 2.3.

Se puede comprobar que el circuito tiene 3 nudos, siendo el nudo C el que se ha tomado como referencia. Las tensiones de los nudos son las siguientes:

$$U_A, U_B$$

Aplicando la ley de Kirchhoff de intensidades al nudo A y al nudo B resulta:

$$\begin{aligned} \text{Nudo A}: &\ I_1 + I_3 + I_4 = 0 \\ \text{Nudo B}: &\ -I_3 - I_4 + I_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por otro lado, las ecuaciones de definición de los elementos son las siguientes:

$$\begin{aligned} I_1 &= -I_g \\ I_2 &= \frac{1}{R_2} U_2 = G_2 U_2 \\ I_3 &= \frac{1}{R_3} U_3 = G_3 U_3 \\ I_4 &= \frac{1}{R_4} U_4 = G_4 U_4 \end{aligned}$$

A continuación es necesario relacionar la tensión de cada elemento con las tensiones de los nudos:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_A \\ U_2 &= U_B \\ U_3 &= U_A - U_B \\ U_4 &= U_A - U_B \end{aligned}$$

De esta forma, las ecuaciones (2.6) quedan como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Nudo A}: &\ -I_g + G_3(U_A - U_B) + G_4(U_A - U_B) = 0 \\ \text{Nudo B}: &\ -G_3(U_A - U_B) - G_4(U_A - U_B) + G_2 U_B = 0 \end{aligned}$$

Reordenando términos se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Nudo A}: &\ (G_3 + G_4)U_A - (G_3 + G_4)U_B = I_g \\ \text{Nudo B}: &\ -(G_3 + G_4)U_A + (G_2 + G_3 + G_4)U_B = 0 \end{aligned}$$

Expresado en forma matricial, finalmente se obtienen las ecuaciones de nudos:

$$\begin{pmatrix} G_3 + G_4 & -G_3 - G_4 \\ -G_3 - G_4 & G_2 + G_3 + G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_g \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Es importante destacar que, a partir de un circuito dado, se pueden obtener por inspección las ecuaciones de nudos directamente considerando el valor de los elementos y la conectividad que exista entre ellos. Recalcando aún más, la idea es construir directamente la matriz $\mathbf{G}_N$ y el vector $\mathbf{I}_N$ a partir de la información del circuito. En todos los problemas desarrollados en el libro, el objetivo es el planteamiento de las ecuaciones por inspección. Así, la ecuación matricial (2.7) se puede obtener directamente del circuito de la Figura 2.3. Puede observarse que $G_{N_{(1,1)}}=G_3+G_4$, $G_{N_{(2,2)}}=G_2+G_3+G_4$ y $G_{N_{(1,2)}}=G_{N_{(2,1)}}=-G_3-G_4$.

Ejemplo 2.2.1. En el circuito de la Figura 2.4, obtener las ecuaciones de nudos.

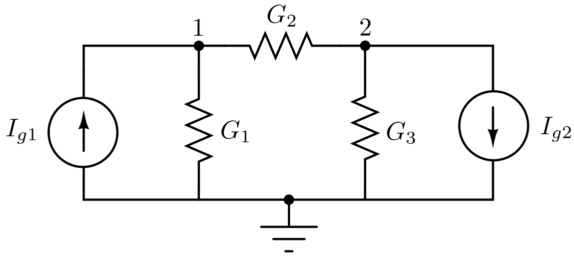

Figura 2.4.

Solución. Se puede observar que el circuito tiene 3 nudos, uno de los cuales se toma como referencia. En el nudo 1 inciden las conductancias G_1 y G_2, por tanto el término diagonal $(1{,}1)$ será la suma de ambas conductancias. En el nudo 2 inciden las conductancias G_2 y G_3, por tanto, el término diagonal $(2{,}2)$ será la suma de ambas conductancias. El nudo 1 y el nudo 2 están conectados directamente a través de la conductancia G_2, por tanto, el término no-diagonal será dicha conductancia con signo cambiado. Respecto al término independiente, se puede observar que en el nudo 1 está entrando la intensidad I_{g1} y en el nudo 2 está saliendo la intensidad I_{g2}, por tanto el primer término será I_{g1} y el segundo término $-I_{g2}$. En resumen, las ecuaciones de nudos son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2+G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{g1} \\ -I_{g2} \end{pmatrix}$$

2.3. Ecuaciones de nudos en circuitos de corriente alterna

En el caso de circuitos en régimen permanente de alterna y teniendo en cuenta que se usan las técnicas fasoriales, entonces las ecuaciones de nudos tienen la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} \overline{Y}_{N_{(1,1)}} & \cdots & \overline{Y}_{N_{(1,n-1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{Y}_{N_{(n-1,1)}} & \cdots & \overline{Y}_{N_{(n-1,n-1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{U}_1 \\ \vdots \\ \overline{U}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{I}^g_1 \\ \vdots \\ \overline{I}^g_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{Y}_N \mathbf{U}_N = \mathbf{I}_N$$

donde

$\mathbf{Y}_N$ se denomina matriz de admitancias nodales.

$\mathbf{U}_N$ se denomina vector de tensiones de nudos.

$\mathbf{I}_N$ se denomina vector de intensidades inyectadas en los nudos.

Los elementos de la matriz $\mathbf{Y}_N$ se obtienen de la siguiente forma:

$\overline{Y}_{N_{(j,j)}} = \sum_k \overline{Y}_{jk}$ (sumatorio de todas las admitancias que tienen un terminal en el nudo j)

$\overline{Y}_{N_{(j,k)}} = -\sum \overline{Y}_{jk}$ (sumatorio, cambiado de signo, de todas las admitancias que tienen un terminal en el nudo j y otro en el nudo k)

Los elementos del vector $\mathbf{I}_N$ se obtienen como sigue:

$\overline{I}^g_j = \sum \overline{I}^{ge}_j - \overline{I}^{gs}_j$ (sumatorio de las fuentes de intensidad que inciden en el nudo j, positivas si entran en el nudo y negativas si salen)

Ejemplo 2.3.1. En el circuito de la Figura 2.5, obtener las ecuaciones de nudos.

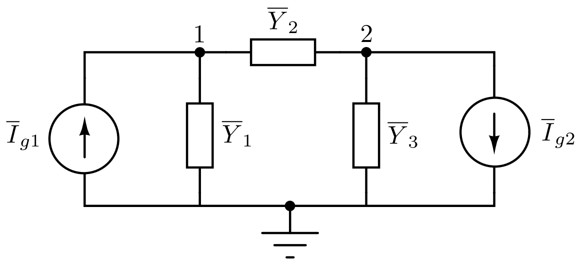

Figura 2.5.

Solución.

$$\begin{pmatrix} \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 & -\overline{Y}_2 \\ -\overline{Y}_2 & \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{I}_{g1} \\ -\overline{I}_{g2} \end{pmatrix}$$

2.4. Casos particulares

Hasta el momento solo se han tratado circuitos con resistencias y fuentes de intensidad. A continuación se muestra el procedimiento para obtener las ecuaciones de nudos en el caso de circuitos que contengan fuentes reales de tensión, fuentes ideales de tensión y fuentes dependientes. Con ello se cubre prácticamente la totalidad de casuística que puede aparecer a la hora de plantear las ecuaciones nudos de forma sistemática por inspección. Asimismo, dentro de estos casos particulares queda incluido el tratamiento que se le puede dar, por ejemplo, a las bobinas acopladas, las cuales se pueden modelar como fuentes dependientes.

2.4.1. Circuitos con fuentes reales de tensión

Cuando en el circuito hay fuentes reales de tensión, para plantear por inspección las ecuaciones de nudos es conveniente sustituirlas por su correspondiente fuente real de intensidad equivalente, tal y como se muestra en la Figura 2.6. Una vez hecha la sustitución entonces se sigue el mismo procedimiento descrito anteriormente.

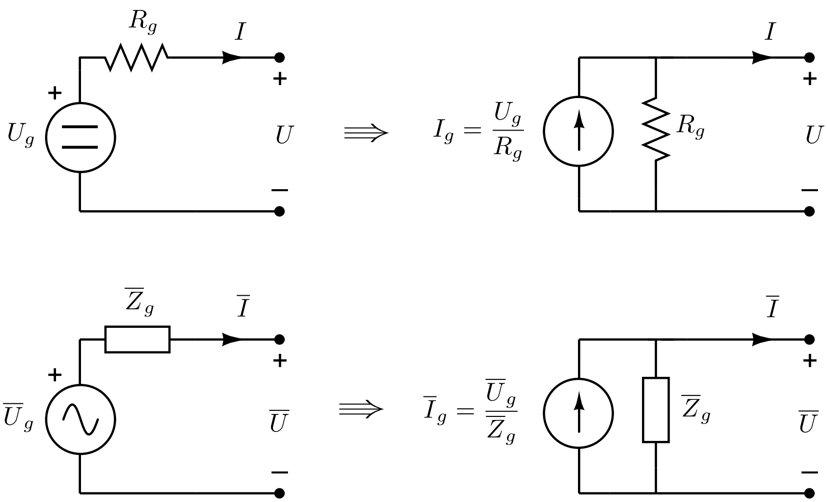

Figura 2.6. Equivalencia de fuentes reales.

Ejemplo 2.4.1. En el circuito de la Figura 2.7, obtener las ecuaciones de nudos.

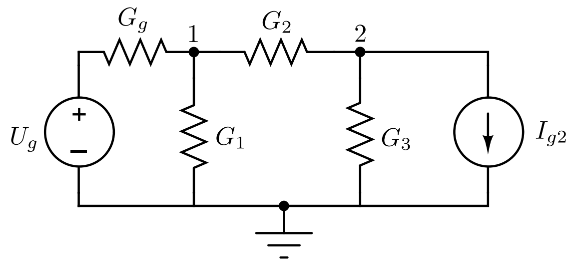

Figura 2.7.

Solución. Se puede observar que el circuito tiene una fuente real de tensión, la cual se sustituirá por una fuente de intensidad equivalente, tal y como se muestra en la Figura 2.8.

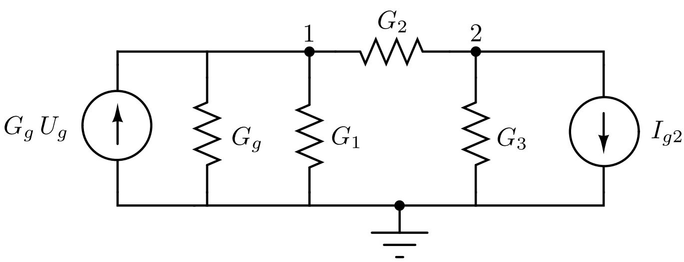

Figura 2.8.

Según la Figura 2.8:

$$\begin{pmatrix} G_g + G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_g G_g \\ -I_{g2} \end{pmatrix}$$

2.4.2. Circuitos con fuentes ideales de tensión

En circuitos donde hay fuentes ideales de tensión, el procedimiento a seguir para plantear las ecuaciones de nudos por inspección es el siguiente:

1. Sustituir cada fuente de tensión ideal por una fuente de intensidad ideal de valor I_x ($\overline{I}_x$ en el caso fasorial) desconocido. La referencia de dichas fuentes es arbitraria.
2. Plantear por inspección las ecuaciones de nudos.
3. Eliminar las intensidades desconocidas que aparecerán en el término independiente procedentes de las fuentes ideales de tensión que han sido sustituidas. Para ello caben dos posibilidades: