

EQUACIONS DIFERENCIALS EN DERIVADES PARCIAIS DE LA FÍSICA

Clara Salueña

Albert Díaz

Departament de Física de la Matèria Condensada

EQUACIONS DIFERENCIALS EN DERIVADES PARCIALS DE LA FÍSICA

Clara Salueña

Albert Díaz

Departament de Física de la Matèria Condensada

Índex

INTRODUCCIÓ	7
1. EQUACIONS DIFERENCIALS	11
1.1. Introducció	11
1.1.1. Exemples d'equacions diferencials de segon ordre en derivades parcials habituals en física	12
1.1.2. Generalitats	14
1.1.3. Mètodes de resolució	15
1.1.4. Separació de variables en equacions diferencials en derivades parcials	15
1.2. Mètode de Frobenius per a equacions ordinàries de segon ordre homogènies	20
1.2.1. Estudi de solucions entorn de punts ordinaris	21
1.2.2. Solució entorn de punts singulars regulars	23
1.2.3. Determinació d'una segona solució independent a partir d'una solució coneguda. Mètode del wronskià	27
1.3. Mètodes per a equacions no homogènies	30
1.3.1. Mètode de variació de les constants	31
1.3.2. Mètode de la funció de Green	32
1.4. Apèndix: delta de Dirac	35
2. TEORIA DE STURM-LIOUVILLE	37
2.1. Introducció	37
2.2. Espais de funcions	38
2.3. Operadors diferencials lineals de segon ordre	39
2.3.1. Operador adjunt i operador autoadjunt	39
2.3.2. Hermiticitat i condicions de contorn	40
2.4. Problema de Sturm-Liouville	40
2.4.1. Problema de Sturm-Liouville regular	41
2.5. Ortonormalització de Gram-Schmidt	43
2.6. Completesa.....	44
3. SÈRIES DE FOURIER	47
3.1. Introducció. Teoria de Sturm-Liouville	47
3.2. Propietats de les sèries de Fourier	50
3.3. Identitat de Parseval.....	52
3.4. Altres desenvolupaments relacionats	54
3.4.1. Espectre d'una funció	54
3.4.2. Sèries de Fourier en sinus i en cosinus.....	54
3.5. Material avançat: fenomen de Gibbs	56
3.6. Exemple d'aplicació.....	56
4. TRANSFORMADES INTEGRALS	59
4.1. Transformada de Fourier.....	59
4.1.1. Pas al continu de les sèries de Fourier	59
4.1.2. Definició.....	60
4.1.3. Propietats de la transformada de Fourier	61
4.1.4. Producte de convolució de dues funcions	63

4.2.	Transformada de Laplace	65
4.2.1.	Definició.....	65
4.2.2.	Propietats de la transformada de Laplace.....	65
4.2.3.	Teorema de convolució	67
5.	POLINOMIS DE LEGENDRE.....	71
5.1.	Equació de Legendre	71
5.1.1.	Solució de l'equació de Legendre pel mètode de Frobenius.....	72
5.2.	Els polinomis de Legendre $P_l(x)$	73
5.2.1.	Propietats dels polinomis de Legendre.....	74
5.3.	Polinomis de Legendre com a problema de Sturm-Liouville	76
5.4.	Solució general de l'equació de Laplace sense dependència en φ	78
6.	FUNCIONS DE BESSEL.....	81
6.1.	Obtenció de l'equació diferencial de Bessel	81
6.2.	Solució de l'equació de Bessel pel mètode de Frobenius.....	82
6.3.	Funcions de Bessel d'ordre semienter (funcions de Bessel esfèriques)	84
6.4.	Funcions de Bessel de segona espècie. Funcions de Neumann.....	85
6.5.	Propietats de les funcions de Bessel de primera espècie.....	87
6.6.	Ortogonalitat de les funcions de Bessel	90
6.6.1.	Forma canònica de l'equació de Bessel. Hermiticitat de l'operador diferencial	90
6.6.2.	Sèries de Fourier-Bessel	93
6.7.	Apèndix: la funció gamma d'Euler.....	95
6.8.	Apèndix: l'equació transformada de Bessel	96
ÍNDEX DE FIGURES		97

INTRODUCCIÓ

Descripció de l'assignatura

El text-guia que teniu a les mans ha estat escrit per a l'assignatura Mètodes Matemàtics de la Física II del quart semestre del grau de Física.

L'estudiant ja està familiaritzat amb els elements bàsics d'àlgebra i càlcul i sap com resoldre equacions diferencials senzilles. En aquest curs aprendrà a resoldre equacions diferencials en derivades parcials i, de forma general, les equacions diferencials ordinàries que se'n dedueixen en alguns casos físics d'interès. Aquest domini és imprescindible per poder atacar els problemes més complicats que li apareixeran en Física Quàntica, Òptica, Electro-magnetisme i en la major part de les assignatures més avançades del grau.

Objectius

L'objectiu principal és proporcionar a l'estudiant les eines matemàtiques bàsiques per resoldre problemes físics. D'una manera general, podem dir que és molt important que l'alumne adquireixi sòlidament les tècniques de resolució d'equacions diferencials de segon ordre.

Coneixements previs

L'assignatura requereix un coneixement satisfactori del càlcul d'una i de diverses variables, objectiu de les assignatures del primer any. És la darrera assignatura obligatòria de matemàtiques (encara que té una orientació essencialment física) i exigeix que l'alumne tingui familiaritat i agilitat amb els conceptes bàsics del càlcul.

Metodologia

Aquesta assignatura està orientada especialment a la resolució de problemes. No cal dir que la llista de problemes proporcionada com a material independent complementa perfectament les classes de teoria; per altra banda, el nombre de crèdits es troba repartit perquè es pugui establir una bona coordinació entre les classes de teoria i les de problemes. Aquestes darreres són especialment importants i mai no s'haurien de reduir a una exposició sistemàtica de la llista de problemes per part del professor. El treball continuat de l'alumne és indispensable per a la bona marxa del curs; si aquesta persistència no existeix de forma majoritària, el ritme, l'atenció i la motivació de tothom decreix.

A part dels apunts de classe, l'estudiant hauria de tenir la curiositat suficient per consultar alguna part, com a mínim, de la bibliografia addicional que normalment indica el professor. Això li serà enormement útil ara i més endavant, ja que cap text mai no és exhaustiu i sovint calen diverses referències bibliogràfiques per a una satisfacció personal definitiva.

Tanmateix, és força recomanable l'accés a diferents fonts disponibles a Internet en formats tant de text com audiovisuals o computacionals.

Ús del text-guia

El text-guia pot ajudar l'estudiant en la tasca de planificar l'estudi, a part de ser una referència clara i fiable del contingut del programa de l'assignatura, i amb el nivell adequat a la maduresa de l'estudiant de segon any.

Es tracta d'una guia per a les classes de teoria, encara que hi ha exemples escollits dins el text que serviran per a la resolució d'altres problemes. Més que no pas plantejar un problema perquè sigui resolt per l'estudiant, els exercicis proposats al llarg del text exemplifiquen o clarifiquen una certa situació que es vol posar en relleu. Són els problemes de la col·lecció els que l'estudiant ha d'intentar resoldre de manera autònoma, amb l'ajut d'aquest text-guia i les notes preses a classe. No intentem, però, que el text sigui l'única referència: molts dels punts tractats aquí seran ampliat pel professor des del seu punt de vista personal i molts d'altres podran ser ampliat pel mateix estudiant amb les referències que s'han inclòs en els apartats corresponents. D'altra banda, hi ha altres punts que possiblement sobrepassen el nivell d'exigència de l'assignatura, però els hem volgut incloure com a futurs punts de referència per a l'estudiant.

Continguts del text-guia

El nostre objectiu ha estat unificar en un text tot el que els estudiants de primer cicle necessiten saber sobre les equacions diferencials en derivades parcials de la física.

El text-guia consta de sis capítols. Els dos primers són més generals i constitueixen la base i la motivació per a l'estudi de les solucions d'equacions diferencials, desenvolupat en els capítols 3, 5 i 6; el capítol 4 torna a ser de caràcter general i introdueix les transformades integrals. En els darrers anys aquest capítol s'ha intercalat en els altres per facilitar als estudiants el seguiment d'altres assignatures del semestre.

Més detalladament, el contingut es pot desglossar de la manera següent. El primer capítol està dedicat a fer un estudi general de les equacions diferencials en derivades parcials que apareixen comunament en la física. Aquestes equacions normalment permeten ser atacades mitjançant el mètode de separació de variables, que porta a equacions diferencials ordinàries amb punts singulars. Són justament els comportaments a prop d'aquests punts els interessants i per això s'estudia el mètode de Frobenius: per trobar solucions en forma de sèrie de potències al voltant dels punts singulars regulars. Finalment introduïm, a un nivell bàsic, el concepte de propagador o funció de Green. En el segon capítol presentem la teoria de Sturm-Liouville com un problema de diagonalització d'operadors diferencials. El nostre objectiu en aquest punt és més pràctic que rigorós, ja que només introduïm els conceptes bàsics que s'utilitzaran posteriorment en exemples concrets. A continuació, apliquem aquesta teoria a l'equació diferencial de l'oscil·lador harmònic. Presentem, doncs, els desenvolupaments en sèrie de Fourier com un cas particular de desenvolupament en funcions pròpies d'un cert operador diferencial de segon ordre. En el quart capítol s'enuncien les principals propietats de les transformades integrals de Fourier i Laplace, que considerem eines potents per a la resolució d'equacions diferencials en derivades parcials.

Finalment, els capítols 5 i 6 es dediquen, respectivament, a l'estudi dels polinomis de Legendre i al de les funcions de Bessel, de nou com a exemples d'aplicació de la teoria de Sturm-Liouville per a problemes físics amb unes certes simetries.

Agraïments

Aquestes notes han madurat al llarg dels anys que hem tingut ocasió de dedicar-nos, primer, a l'antiga assignatura Mètodes Matemàtics de la Física III i, actualment, en el grau de Física de quatre anys, a la de Mètodes Matemàtics de la Física II. Han col·laborat en aquest procés tots els nostres companys en les assignatures: Alfred Molina, Conrad Pérez, José Alberto Lobo, Enric Verdaguer, José M. M. Senovilla, Juan Luis Gómez, Agustí Pérez-Madrid, i especialment en Josep Llosa, que ha fet una acurada revisió de la darrera versió.

Us agraïrem que si teniu qualsevol suggeriment sobre aquest text-guia, ens el transmeteu per correu electrònic a albert.diaz@ub.edu.

1.1. Introducció

En aquest capítol estudiarem les equacions diferencials de segon ordre en derivades parcials. Veurem com convertir aquestes equacions en equacions ordinàries i introduir nous mètodes per a la seva resolució.

Per què estudiem amb tant detall un tipus tan concret d'equacions diferencials, les equacions diferencials de segon ordre en derivades parcials? Perquè són equacions que apareixen molt sovint en la resolució de problemes físics. Bona part de les solucions analítiques que es coneixen s'obtenen a partir d'aquest tipus d'equacions.

Les variables de les quals depenen aquestes equacions són normalment les **tres coordenades espacials i el temps**. Aquesta és la situació més comuna, però ocasionalment trobem equacions que depenen d'altres variables, per exemple, les de l'**espai de les fases** (coordenades i velocitats o moments generalitzats).

Part de la dependència en les variables espacials ve donada en termes de l'operador laplacà ($\nabla^2 \equiv \Delta$), que s'expressa de manera diferent en cada sistema de coordenades¹ i que depèn, òbviament, de la dimensionalitat espacial del sistema.

Coordenades cartesianes (vegeu fig. 1.1a):

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Coordenades cilíndriques (vegeu fig. 1.1b):

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Coordenades esfèriques (vegeu fig. 1.1c):

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right]$$

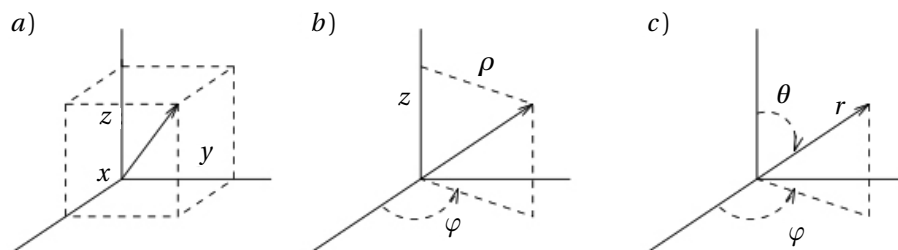


Figura 1.1. Sistemes de coordenades: a) cartesianes, b) cilíndriques i c) esfèriques.

¹ Aquests són els sistemes de coordenades més utilitzats en problemes físics. Per a altres sistemes de coordenades podeu consultar el llibre de M. R. SPIEGEL i L. ABELLANAS, *Manual de fórmulas y tablas de matemática aplicada*, McGraw-Hill, Madrid, 1988, pàg. 105-109 (col·lecció Schawm).

1.1.1. Exemples d'equacions diferencials de segon ordre en derivades parcials habituals en física

a) Equació de Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0$$

ψ : funció escalar que descriu alguna magnitud física.

En quins problemes físics apareix l'equació de Laplace?

- *Fenòmens electromagnètics* (electroestàtica):

$\psi = V$, potencial electroestàtic. Aleshores

$$\nabla^2 V = 0$$

és l'equació que satisfà el potencial elèctric en absència de càrregues, tant lliures com lligades.

- *Gravitació*:

V és el potencial gravitatori en absència de masses.

- *Fenòmens de transferència tèrmica*:

$\psi = T$, temperatura. Ara

$$\nabla^2 T = 0$$

és l'equació que satisfà la temperatura estacionària en un sistema sense convecció (sòlid o fluid en repòs).

- *Hidrodinàmica*:

$\psi = \vec{v}$, velocitat (funció vectorial $\equiv$ 3 components). Ara

$$\nabla^2 \vec{v} = 0$$

és l'equació de Navier-Stokes estacionària en un fluid incompressible viscos.

b) Equació de Poisson

Equació que iguala la laplaciana d'una funció desconeguda a una funció coneguda de les variables espacials

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

- *Electroestàtica*:

ψ és el potencial electroestàtic en presència de càrregues

ρ és la densitat volúmica de càrrega total

- *Gravitació*

ψ és el potencial gravitatori en presència de masses

ρ és la densitat de massa

c) *Equació de Helmholtz*

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

d) *Equació de difusió dependent del temps*

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Per exemple, si $\psi = T$, temperatura, l'equació

$$\lambda \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t},$$

en què λ és la difusivitat tèrmica, descriu un procés no estacionari. Representa un procés de no-equilibri, com ara la propagació de la calor en un sòlid o en un fluid en el qual no hi ha convecció.

e) *Equació d'ones dependent del temps*

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Aquesta equació descriu la propagació i correspon a l'equació de Helmholtz incloent en ψ la dependència temporal. c és la velocitat de propagació i depèn de cada medi. Es pot incloure la dependència temporal de les equacions en la laplaciana mitjançant una forma diferencial 4-dimensional. Així, en coordenades cartesianes, la laplaciana passa a ser la D'Alambertiana,

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \quad \text{amb} \quad x_4 = c t$$

f) *Equació de Schrödinger*

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] \psi = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

on ψ és una funció d'ona.

g) *Equacions de Maxwell*

Equacions en derivades parcials per als camps electromagnètics en el buit i en absència de càrregues.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Aquestes són les equacions fonamentals de l'electromagnetisme escrites en el sistema MKS. En altres sistemes d'unitats (CGS, gaussià o gaussià racionalitzat), la seva expressió pot variar pel que fa a les constants que hi apareixen.

Si prenem el rotacional de la segona equació, ens queda

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{E})}_{=0} - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B},$$

amb la qual cosa podem obtenir

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

que és l'equació d'ones per al camp elèctric.

1.1.2. Generalitats

Totes les equacions anteriors tenen en comú el següent:

- **Són equacions lineals en ψ .** Encara que hi ha casos interessants, com els xocs d'ones, que no són lineals, en principi només tractarem casos que sí que ho són. Si una equació no és lineal no podem garantir l'existència i la unicitat de la seva solució.²
- **Són equacions diferencials de segon ordre en derivades parcials.** Les equacions de Maxwell són en principi de primer ordre, però hi intervenen dues funcions desconegudes. Si eliminem una de les funcions ens queden equacions de segon ordre.
- **Es poden posar com**

$$\mathcal{L}[\psi] = F$$

en què $\mathcal{L}$ és un operador diferencial lineal. En coordenades cartesianes, serà un operador que tindrà la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, z, t, \partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t)$. D'altra banda, F , el terme inhomogeni de l'equació, és una funció específica característica del problema i ψ és la funció desconeguda, que pot ser escalar o vectorial.

Un **operador diferencial lineal** és el que compleix

$$\mathcal{L}[\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2] = \lambda_1 \mathcal{L}[\psi_1] + \lambda_2 \mathcal{L}[\psi_2],$$

en què $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Això és molt important perquè si $\psi_{1,2}$ són solucions *independents* de l'equació diferencial homogènia

$$\mathcal{L}[\psi_{1,2}] = 0,$$

aleshores qualsevol combinació lineal d'elles també ho serà. I la solució general de l'operador es podrà posar com una combinació lineal:

$$\psi = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2.$$

² Vegeu un estudi senzill, però avançat, de les equacions no lineals a G. F. SIMMONS, *Ecuaciones diferenciales*, McGraw-Hill, Madrid, 1993, cap. 11.

1.1.3. Mètodes de resolució

- **Equacions diferencials homogènies.** Un primer pas és intentar la **separació de variables**: separem les equacions en derivades parcials en equacions diferencials ordinàries. Aquestes equacions seran lineals i la seva solució té dues constants d'integració. La solució física d'una equació diferencial ha de complir certs requisits perquè sigui única. Aquestes condicions són de dos tipus:

- *Condicions inicials*: especifiquen el valor de la funció i la seva derivada en un punt $y(x_0) = a_0$, $y'(x_0) = a_1$.
- *Condicions de contorn*: especifiquen el valor que ha de prendre la funció, la seva derivada o una combinació lineal de les dues en dos punts diferents.

Sota algunes condicions no podrem garantir l'existència o la unicitat de la solució.

Una equació diferencial amb les seves condicions inicials o de contorn es presta a dos nivells d'anàlisi:

- *Global*: cerca la solució en una regió d'extensió finita o infinita.
- *Local*: s'investiga la solució al voltant d'un punt mitjançant el mètode de Frobenius, que estudiarem a continuació.

- **Equacions diferencials no homogènies**

- *Mètode de variació de les constants*: es construeix una solució particular a partir de la solució general de l'homogènia.
- *Mètode de Green*: es construeix una solució integral a partir de la funció de Green de l'operador diferencial.

També hi ha altres mètodes analítics, com les **transformades integrals** (Fourier, Laplace), i mètodes numèrics, basats en el càlcul de **diferències finites**.

1.1.4. Separació de variables en equacions diferencials en derivades parcials

Aquest mètode s'aplica a les equacions diferencials homogènies. Consisteix a imposar una forma factoritzada per a la solució, de manera que es pugui descompondre en funcions independents de les diferents variables. No podem garantir l'existència d'una solució d'aquest tipus, però si existeix, cosa que es dedueix de la consistència del càlcul, aquest és el mètode més senzill. Per veure-ho de manera més clara n'estudiarem dos exemples concrets.

Exemple. Resolució de l'equació de Helmholtz en coordenades cartesianes. Aquest tipus de problema apareix, per exemple, en estudiar la propagació de la llum en guies d'ona rectangulars o en la resolució de problemes en electroestàtica.

L'equació de Helmholtz és

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0,$$

que en coordenades cartesianes s'escriu:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0.$$

Buscarem una solució factoritzada de la forma

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Substituint en l'equació anterior, tenim

$$X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) + k^2 X(x)Y(y)Z(z) = 0,$$

i dividint ara per ψ aquesta equació,

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0.$$

Com que k^2 és una constant i X''/X només depèn de x , Y''/Y de y i Z''/Z de z , cadascun dels termes haurà de ser una constant per separat. Així, per exemple,

$$\frac{X''}{X} = \ell \implies \frac{d^2 X}{dx^2} = \ell X,$$

que té per solució

$$X(x) = A_1 e^{\sqrt{\ell}x} + A_2 e^{-\sqrt{\ell}x}.$$

Hem obtingut, doncs, una equació diferencial ordinària de segon ordre amb coeficients constants que podem resoldre fàcilment. Anàlogament, obtenim

$$Y(y) = B_1 e^{\sqrt{m}y} + B_2 e^{-\sqrt{m}y}$$

$$Z(z) = C_1 e^{\sqrt{n}z} + C_2 e^{-\sqrt{n}z},$$

en què ℓ, m, n són en principi arbitràries, però han de complir una *condició de tancament*:

$$\ell + m + n + k^2 = 0.$$

Hem aconseguit separar l'equació en derivades parcials en tres equacions diferencials ordinàries. Ara tenim que, per a qualsevol $\psi_{\ell mn}$ com

$$\psi_{\ell mn}(x, y, z) = X_\ell(x)Y_m(y)Z_n(z), \quad \text{amb } \ell + m + n + k^2 = 0,$$

se satisfà l'equació de partida. Tenim un conjunt de solucions subjectes a una condició de tancament i això determina un pla en l'espai de variables ℓ, m, n (les *constants de separació* no són totes independents). La solució general ψ s'obteniria fent una combinació lineal de totes les possibles solucions $\psi_{\ell mn}$

$$\psi = \sum_{\ell, m, n} a_{\ell mn} \psi_{\ell mn}, \quad \text{amb } \ell + m + n + k^2 = 0,$$

i escollint els coeficients $a_{\ell mn}$ de tal manera que es complissin les *condicions de contorn* del problema. Veurem més endavant com aquestes limiten també el conjunt de valors que poden prendre les constants de separació.

Exemple. Resolució de l'equació de Helmholtz en coordenades esfèriques.

Ara $\psi = \psi(r, \theta, \varphi)$ i

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -k^2 \psi.$$

Intentem, com en el cas anterior, trobar solucions que siguin un producte de tres funcions independents

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

Substituïm ara en l'equació i dividim per ψ ,

$$\frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -k^2,$$

multipliquem l'equació per $r^2 \sin^2 \theta$,

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -k^2 r^2 \sin^2 \theta,$$

i si aïllem la part que depèn de φ , obtenim

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -k^2 r^2 \sin^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right).$$

El primer membre només depèn de φ i el segon, de r i de θ . Per tant, hauran de ser constants idèntiques i tindrem

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = M.$$

Necessàriament, la dreta de la igualtat ha de ser una constant. Ja veurem més endavant, però, quines restriccions comporta el problema físic pels possibles valors de M .

Per a la part en r i θ tenim

$$k^2 r^2 \sin^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -M.$$

Si dividim l'equació per $\sin^2 \theta$, ens queda

$$\underbrace{k^2 r^2 + \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right)}_{\text{només depèn de } r} + \underbrace{\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right)}_{\text{només depèn de } \theta} = -\frac{M}{\sin^2 \theta}.$$

Per tant, ambdós membres han de ser la mateixa constant,

$$k^2 r^2 + \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = Q$$

$$-\frac{M}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = Q.$$

La darrera d'aquestes equacions,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + Q\Theta + \frac{M}{\sin^2 \theta} \Theta = 0,$$

es transforma, amb el canvi

$$x = \cos \theta \quad \Theta(\theta) = y(x),$$

en l'equació

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(Q + \frac{M}{1-x^2}\right)y = 0,$$

que s'anomena *equació de Legendre associada*. En el capítol 4 veurem com es pot resoldre aquesta equació.

Per altra banda, l'equació que hem obtingut per a R ,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - Q \frac{1}{r^2} R = 0,$$

amb un canvi de variables es transforma en l'equació de Bessel, com veurem en el capítol 5.

Hem aconseguit, doncs, tres equacions diferencials ordinàries de segon ordre, i la solució més general serà una combinació lineal de solucions ψ_{QM} del tipus

$$\psi_{QM} = R_Q(r) \Theta_{QM}(\theta) \Phi_M(\varphi),$$

és a dir,

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{Q,M} R_Q(r) \Theta_{QM}(\theta) \Phi_M(\varphi),$$

en què Q, M són en principi valors arbitraris.

Veurem a continuació com aquests paràmetres depenen de les condicions físiques del problema que estem considerant. Suposem que l'equació de Helmholtz que estem estudiant correspon a un problema físic i que φ és l'angle azimuthal; aleshores és lícit demanar que la solució compleixi certes condicions. En particular, exigim que sigui una funció de període 2π ,³ és a dir,

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Aleshores, segons l'equació diferencial, aquesta funció haurà de ser de la forma

$$\Phi \propto \exp(\sqrt{M} \varphi), \quad \text{amb} \quad \sqrt{M} = \pm i m, m \in \mathbb{Z},$$

o sigui,

$$\Phi = C_1 e^{im\varphi} + C_2 e^{-im\varphi},$$

que és una funció periòdica de període $T = 2\pi/m$. Per tant, això implica que $M = -m^2$, en què m és un nombre enter. Veurem també més endavant (capítol 5) que $Q = \ell(\ell + 1)$, i ℓ és un nombre natural, perquè volem solucions que siguin acotades en tot l'interval de definició del nostre problema. Per la mateixa raó, els possibles valors de m i de ℓ tampoc no són completament independents.

Exercici. Resoleu l'equació de Helmholtz en coordenades cilíndriques.

3 Això és conseqüència del fet que (r, θ, φ) i $(r, \theta, \varphi + 2\pi)$ donen el mateix $\vec{r} = (x, y, z)$.